

LAHENDUSED 7.KLASS

1. Vastus: Kotist võeti välja 28 palli ja neist 4 olid punased.

Lahendus:

Et välja võetud pallide hulgast oli valgeid 6 korda rohkem kui punaseid, siis välja võetud pallide arv peab jaguma arvuga 7. Et kotti jäänud pallide seas oli punaseid 5 korda rohkem kui valgeid, siis sinna jäänud pallide arv peab jaguma arvuga 6. Seega kogu pallide arv 58 tuleb jaotada kaheks liidetavaks nii, et üks neist jaguks arvuga 7 ja teine arvuga 6. Et arvuga 6 jaguv arv peab olema paarisarv ja ka pallide koguarv 58 on ka paarisarv, siis ka arvuga 7 jagub arv peab olema paarisarv.

Vaatame võimalusi kui üks liidetav jagub arvuga 7:

$$58 = 14 + 44$$

$$58 = 28 + 30$$

$$58 = 42 + 16$$

$$58 = 56 + 2.$$

Neist neljast võimalusest vaid juhul $28 + 30$ jagub teine liidetav arvuga 6. Seega välja võeti 28 palli.

Et välja võetud pallide seas oli valgeid 6 korda rohkem, siis punaseid palle oli $28 : 7 = 4$.

Hindamine:

Tähelepanek, et välja võetud pallide arv jagub arvuga 7: 1p

Tähelepanek, et kotti jäänud pallide arv jagub arvuga 6: 1p

Vaadatud läbi kõik võimalused: 3p

(Märkus: kui ei ole kõiki võimalusi vaadeldud ja ei ole selgitatud miks jätab osad vaatamata, anda selle osa eest juhul kui üks võimalus puudu 2p ja kui võimalustest kaks puudu, siis 1p. Siinjuures ei ole oluline, kas ta on näiteks paarsusega piiranud vaadeldavate võimaluste arvu, või mitte.)

Leitud kotist välja võetud ja kotti jäänud pallide arvud: 1p

Leitud välja võetud pallide seas olnud punaste pallide arv: 1p

7p

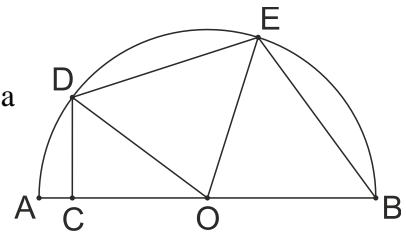
Antud ainult vastus: 2p (Antud vaid vastustest üks õige 1p)

2. Vastus: Nurga AOE suurus on 108°.

Lahendus:

Joonestame lõigud DO ja EO, mis on poolringi raadiused. Seega tekkinud kolmnurgad DOE ja EOB on võrdhaarsed.

Olgu nurga CDO suurus x° .



Siis kuna DO poolitab nurga CDE on ka nurga ODE suurus x° . Kuna DOE on võrdhaarne kolmnurk, siis ka nurga OED suurus on x° . Et OE poolitab nurga DEB ja et EOB on ka võrdhaarne kolmnurk, siis saame, et ka nurgad OEB ja EBO on suurusega x° .

Vaatleme nelinurka CDEB. Selle nurkade suurused on 90° , $2x^\circ$, $2x^\circ$ ja x° .

Seega $90^\circ + 2x^\circ + 2x^\circ + x^\circ = 360^\circ$, millest $5x^\circ = 270^\circ$ ja järelikult $x = 54$.

Võrdhaarsest kolmnurgast DOE saame, et $\angle DOE = 180^\circ - 2 \cdot 54^\circ = 72^\circ$.

Täisnurksest kolmnurgast DCO saame, et $\angle COD = 90^\circ - 54^\circ = 36^\circ$.

Saame, et $\angle COE = \angle COD + \angle DOE$ või $\angle COE = 180^\circ - \angle EOB$.

Saame, et $\angle COE = 108^\circ$.

Hindamine:

Tõmmatud raadiused ja näidatud millised nurgad, mille põhjal on kõik omavahel võrdsed: 2p

Nelinurgast CDEB leitud selle nurkade suurused: 2p

Leitud kas nurk DOE või EOB: 1p

Leitud nurga AOE suurus: 2p

7p

Antud ainult õige vastus: 2p

3. Vastus: Arvu 1 vastastahule on kirjutatud arv 3.

Lahendus:

Kui kuubik panna lauale ja liita kokku neli arvu, mis ei asu kuubiku alumisel ja ülemisel tahul, siis saame tulemuseks kahel paaril vastastahkudel olevate arvude summa.

Et kuubil on kokku kolm paari vastastahke, siis järelikult kui kõikide arvude summast lahutada kahel paaril vastastahkudel olevate arvude summa, saame kolmandal vastastahkude paaril olevate arvude summa.

Kuubil olevate arvude summa on $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$.

Järelikult kuubil leidub vastastahkude paar, millel olevate arvude summa on

$21 - 13 = 8$ ja leidub ka vastastahkude paar, millel olevate arvude summa on

$21 - 12 = 9$.

Järelikult kolmandal vastastahkudel paaril olevate arvude summa on $21 - 8 - 9 = 4$.

Et kõikidel tahkudel olid erinevad arvud, siis selleks, et saada kahe arvu summaks 4 on antud arvudega ainult üks võimalus. Vastastahkudel peavad olema arvud 1 ja 3.

Tõepoolest selline kuubik on võimalik kui kaks ülejäänud vastastahuke paari on 6 ja 2 ning 5 ja 4.

Hindamine:

Tehtud tähelepanek/selgitatud, mida see antud nelja arvu summa tähendab: 1p

Leitud kuubil olevate kõikide arvude summa: 1p

Leitud vastastahkudel olevate arvude summad ($1p + 1p + 1p$) ehk kokku 3p

Leitud arv, mis peab olema arvu 1 vastastahul: $\underline{2p}$
7p

Antud ainult õige vastus: 2p

Märkus: Kui proovimise teel on leitud selline arvude kirjutamise viis (st mis mille vastas) ja näidatud, et sel juhul antud seosed kehtivad, siis lahenduse eest koos vastusega anda 3p.

Lahendusest peab näha olema, et tõesti ükski teine võimalus ei sobi. Kui aga juurde on joonistatud ka kõik ülejäänud võimalused kuubikutest ja näidatud, et siis mõni antud tingimustest ei ole täidetud anda 7p. (Kui siiski ei ole kõiki vaadeldud, siis vastavalt sellele kui palju juhtumeid on vaadeldud anda lahenduse eest 4 kuni 6 punkti.

4. Vastus: On ainult üks võimalus 126

Lahendus:

Et keskmise rea kaks äärmist arvu on antud, saame leida keskmises lahtris oleva arvu:
 $(5 + 23) : 2 = 14$.

Paneme tähele, et kui mingite arvude m ja n aritmeetiline keskmine on arv k , siis $m + n = 2k$ ning nende kolme arvu summa oleks $k + 2k = 3k$. Vaadeldes nüüd veerge, siis saame, et vasakpoolseimas veerus on arvude summa $3 \cdot 5 = 15$, keskmises $3 \cdot 14 = 42$ ja parempoolsemas $3 \cdot 23 = 69$. Kõikide arvude summa on $15 + 42 + 69 = 126$.

Näitame, et seal juhul on kindlasti täidetud ka tingimus ridade kaupa.

Olgu vasakpoolse veeru ülemises lahtris arv A ja siis selle veeru alumises lahtris peab olema arv $10 - A$. Olgu parempoolse veeru ülemises lahtris arv B , siis alumises lahtris peab olema arv $46 - B$. Sel juhul ülemise rea keskmises lahtris peab olema arv $(A + B) : 2$. Vaatame, kas ka alumise rea keskmises lahtris on sel juhul nende arvude aritmeetiline keskmine. Alumise rea keskmises lahtris peaks siis keskmise veeru põhjal olema arv $28 - (A + B) : 2$. Vaadates alumist rida, saame, et seal on arv $[(10 - A) + (46 - B)] : 2 = (56 - (A + B)) : 2 = 28 - (A + B) : 2$. Seega tõepoolest tingimused on täidetud.

Hindamine:

Leitud keskmises lahtris oleva arv 14: 1p

Välja toodud, et arvude summa on kaks korda suurem nende aritmeetilisest keskmisest või kohe, et kahe arvu ja nende aritmeetilise keskmise summa on võrdne kolmekordse aritmeetilise keskmisega: 3p

Näidatud, et siis ka ridade kaupa seosed kehtivad: 2p

Leitud kõikide arvude summa 1p
7p

kui vastus on leitud konkreetseid arve kasutades:

Leitud keskmises lahtris oleva arv 14: 1p

Leitud mingid sobivad arvud veergude ülemistesse ja alumistesse lahtritesse: 1p

Näidatud, et siis kehtivad ka seosed ridade kaupa: 1p

Selgitatud, et tabelis olevate arvude summa ei sõltu arvude valikust: 3p

(kui on lihtsalt tehtud veel üks-kaks näide ja öeldud, et alati tuleb selline, siis selle osa eest punkte mitte anda. Kui aga on näidatud, kirjeldatud muutumist, et kui muuta arve vaid näiteks esimeses veerus, kuidas see mõjutab ülemise ja alumise rea keskmisi arve, siis anda ikka kuni 3p sõltuvalt analüüsi põhjalikkusest)

Leitud kõikide arvude summa: 1p
7p

Antud ainult vastus, et summa saab olla vaid 126: 2p

5. Vastus: a) leidub b) ei leidu

Lahendus:

Lahendus 1:

a) Olgu x arv, mis eelneb vahetult kolmikule 6, 7 ja 8. Seega arv 8 on arvude x , 6 ja 7 ühelistel number. Järelikult peab arv x olema 5. Seega tõesti selles jadas leidub ka koht, kus järjest on arvud 5, 6 ja 7.

b) Vaatame rea algust: 1, 2, 3, 6, 1, 0, 7, 8, 5, 0, ...

Näeme, et paaritud ja paaris arvud on selles vaheldumisi. Tõepoolest, kuna esimesed kolm esimest arvu on arvu on paaritu, paaris, paaritu, siis järgmine arv peab olema paaris. Nüüd järgmise kolmiku moodustavad paaris, paaritu ja paaris ning järelikult tulemus on paaritu. Et järjestuses 2, 3, 1 on järjest kaks paaritud arvu, siis ei saa leiduda selles reas sellist kohta.

Lahendus 2:

Hakkame järjest moodustuvat arvude rida kirjutama: 1, 2, 3, 6, 1, 0, 7, 8, 5, 0, 3, 8, 1, 2, 1, 4, 7, 2, 3, 2, 7, 2, 1, 0, 3, 4, 7, 4, 5, 6, 5, 6, 7, 8, 1, 6, 5, 2, 3, 0, 5, 8, 3, 6, 7, 6, 9, 2, 7, 8, 7, 2, 7, 6, 5, 8, 9, 2, 9, 0, 1, 0, 1, 2, 3, ...

Siin kohal saame arvude kirjutamise ritta pooleli jätta, sest on näha, et see tsükkel hakkab korduma.

Nüüd saame vastata a) leidub ja b) ei leidu.

Hindamine:

Lahendus 1:

a) Näidatud, et antud kolmiku ees peab olema arv 5: 2p
Tehtud sellest õige järeldud, et leidub: 1p
Ainult vastuse eest, et leidub 0p.

b) Tähelepanek, et paaris ja paaritud arvud peavad olema vaheldumisi: 3p
Antud õige vastus: 1p
ainult vastus ei leidu 0p

7p

Lahendus 2:

Kui on välja kirjutatud kogu õige tsükkel ja selle põhjal vastatud küsimustele õigesti anda 7p.

Märkus: Kui aga tsükklis esineb viga, siis anda tsükli koostamise eest maksimaalselt 2p. Ja kui vastused õiged, siis lisaks 1p, ehk kokku 3 p.

Antud vaid mõlemad õiged vastused, anda kokku ülesanne eest 1p.